BDD による実装が可能な様相論理の充足可能性判定手続き*

田辺 良則 †,‡　高橋 孝一 ‡　山本 光晴 §　佐藤 貴洋 ¶　戸沢 晶彦 **　萩谷 昌己 ¶

様相 μ 計算に代表される各種様相論理の充足可能性判定問題は，決定可能であることが知られていても，効率的な実装は得られていないものが多い．本研究では，無交代様相 μ 計算や μLGF のフラグメントなど，いくつかの論理体系について，タブロー法を用いた判定が可能であることを示す．これらの体系が「交代性を有しない」ことが，タブロー法が適用できる本質的な条件である．また，タブロー法で扱うことになる膨大な論理式の集合を，BDD を用いて表現する方法を提案する．これらによって，小さい時間・空間計算量による充足可能判定手続きの実装が可能となる．

1　はじめに

様相論理における充足可能性の判定にはさまざまな応用がある．例えば，時相論理式によって記述された形式的仕様から，充足可能性判定手続きを用いて並行プログラムを合成する試みが古くから行われている [4, 11]．また，充足可能性決定手続きはモデル検査における自動抽象化の手法においても重要な役割をになっている．現在実用化されつつあるツールにおいては，数値に関する論理式の充足可能性判定が用いられているが [1, 9]，著者たちは時相論理式の充足可能性を用いた抽象化の手法を提案しており [16]，この手法を適用してセルオートマトンの解析が行えることを示した [8]．この他にも，XML の木構造が分岐時間の時相論理式によって表現できるため，XML を処理するプログラムに関する諸性質の検査や推論に充足可能性判定手続きを用いることができる [17]．

上述のセルオートマトンの解析においては，2 方向 CTL の充足可能性決定手続きが必要となる．CTL をはじめとする分岐時間時相論理の充足可能性決定手続きは古くからよく知られているが [3]，その実装例は従来あまり報告されていなかった．これは，分岐時間時相論理が主としてモデル検査に利用されており，充足可能性の判定を必要とする事例が少なかったためと考えられる．著者たちは 2 方向 CTL の充足可能性決定手続きの BDD[2] を用いた効率的な実装を報告した [21]．一方，XML プログラムの解析のためには，二分有限木を対象とする ν 演算子のない 2 方向様相 μ 計算の効率的な充足可能性決定手続きを BDD を用いて実装した [17]．

2 方向 CTL を部分体系として含む一般の 2 方向様相 μ 計算 [19] については，無限木上の交代木オートマトンの空言語問題に帰着することによって，充足可能性問題が計算量 EXPTIME で解けることが知られている．しかし，この手続きには無限語に関するパリティオートマトンの決定化 [14] を含む極めて複雑な操作が必要であり，その実装例は報告されていない．したがって，実用上の観点から，効率の良い実装が可能な部分体系を見つけ出すことは意味がある．

2 方向 CTL においては，充足可能性決定手続きが単純な集合演算の組み合わせによって記述されていた．集合演算は BDD によって表現できるので，効率的な実装が可能であった．本研究では，μ 計算における最小不動点演算子と最大不動点演算子が「交代しない」ときに，単純な集合演算の組み合わせによって充足可能性が判定できることを示す．XML プログラムの解析に対しては，同様の方法により，二分有限木を対象とする 2 方向様相 μ 計算の充足可能性決定手続きを定式化することが可能であり，これについては，その効率的な実装方法も含めて別稿に

---

† 科学技術振興機構 CREST
‡ 産業技術総合研究所 システム検証研究センター
§ 千葉大学 理学部
¶ 東京大学大学院 情報理工学系研究科
** 日本 IBM 東京基礎研究所

* 本研究の一部は，科学技術振興機構戦略的想像研究推進事業 (CREST) 研究領域「情報社会を支える新しい高性能情報処理技術」研究課題「検証における記述量爆発問題の構造変換による解決」として実施された．
* 本研究の一部は，文部科学省の平成 16 年度科学研究費補助金特定領域研究「IT の深化の基盤を拓く情報学研究」(課題番号 16016211) を受けて行われた．
* 本研究の一部は，文部科学省科学研究費補助金萌芽研究「ハイブリッド・セル・オートマトンを用いた生物系と化学系の解析と検証」(課題番号 14658088) を受けて行われた．

ゆずる [18].

また，一階述語論理の決定可能な部分体系に，緩ガード付きフラグメント (loosely-guarded fragment) があり，近年活発に研究されている [7]．この体系は，2 方向の様相を持つものの不動点演算子は持たない命題様相論理の拡張と考えることができ，同様の手法による充足可能性判定手続きの実装を報告している [20]．これに不動点演算子を加えた μLGF[6] と呼ばれる体系は，様相 μ 計算の自然な拡張と考えることができる．本稿では，この体系についても，不動点演算子がある意味で「交代しない」ときに，充足可能性の判定が集合演算の組み合わせによって行えることを示す．

2 無交代 2 方向様相 μ 計算

2.1 文法と意味論

命題変数の集合 Prop と，様相の集合 Mod が与えられているものとする．関数 $\overline{} : \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}$ が定義されており，各 $a \in \mathrm{Mod}$ に対して $\overline{\overline{a}} = a$ が成立しているものとする．

定義 1 2 方向様相 μ 計算 (alternation-free full modal μ-calculus) の論理式の集合 L_μ を定義する．同時に，$\varphi \in L_\mu$ に自由に現れる命題変数の集合 $\mathrm{free}(\varphi)$ を定義する．

- $\top, \bot \in L_\mu$．$\mathrm{free}(\top) = \mathrm{free}(\bot) = \varnothing$.
- 命題変数 $P \in \mathrm{Prop}$ に対し，$P, \neg P \in L_\mu$．$\mathrm{free}(P) = \mathrm{free}(\neg P) = \{P\}$
- $\varphi_1, \varphi_2 \in L_\mu$ のとき，$\varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \in L_\mu$．$\mathrm{free}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{free}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{free}(\varphi_1) \cup \mathrm{free}(\varphi_2)$．このとき，$\vee$ および $\wedge$ を，おのおの $\varphi_1 \vee \varphi_2$ および $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ の主論理記号と呼ぶ.
- $\varphi \in L_\mu$，$a \in \mathrm{Mod}$ のとき，$[a]\varphi, \langle a \rangle\varphi \in L_\mu$．$\mathrm{free}([a]\varphi) = \mathrm{free}(\langle a \rangle\varphi) = \mathrm{free}(\varphi)$．このとき，$[]$ および $\langle\rangle$ を，おのおの $[a]\varphi$ および $\langle a \rangle\varphi$ の主論理記号と呼ぶ.
- $\varphi \in L_\mu$，$X \in \mathrm{Prop}$ とする．$\neg X$ が φ の部分論理式では ない とき，$\mu X\varphi, \nu X\varphi \in L_\mu$．$\mathrm{free}(\mu X\varphi) = \mathrm{free}(\nu X\varphi) = \mathrm{free}(\varphi) \setminus \{X\}$．このとき，$\mu$ および ν を，おのおの $\mu X\varphi$ および $\nu X\varphi$ の主論理記号と呼ぶ.

$\varphi \in L_\mu$ が，次の条件を満たすとき，φ を無交代 (alternation-free) 2 方向様相 μ 計算論理式という.

- $\mu X\psi$ が φ の部分論理式で，$\nu Y\chi$ が ψ の部分論理式であるとき，$X \notin \mathrm{free}(\chi)$.
- $\nu X\psi$ が φ の部分論理式で，$\mu Y\chi$ が ψ の部分論理式であるとき，$X \notin \mathrm{free}(\chi)$.

無交代 2 方向様相 μ 計算論理式全体の集合を $\mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ と書く. ■

たとえば，$\mu X\nu Y(P \wedge [a]Y \wedge [\overline{a}]X)$ は，2 方向様相 μ 計算の論理式であるが，X が νY のスコープに自由変数として現れるので，「無交代」ではない．一方，$\mu X(\nu Y(P \wedge [b]Y) \vee \langle a \rangle X \vee \langle \overline{a} \rangle X)$ は，無交代 2 方向様相 μ 計算の論理式である．これは，2 方向 CTL 論理式の $\mathbf{E}_{a,\overline{a}}\mathbf{F}\,\mathbf{A}_b\mathbf{G}\,P$ に相当する.（一般に 2 方向 CTL の論理式は，無交代 2 方向様相 μ 計算の論理式に翻訳することができる．）

定義 2 Kripke 構造とは，以下を満たす 3 つ組 $\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ である.

- M は集合.
- R は Mod を定義域とする関数で，$a \in \mathrm{Mod}$ に対して，$R(a) \subseteq M \times M$，$R(\overline{a}) = R(a)^{-1}$ が成り立つ.
- λ は Prop を定義域とする関数で，$P \in \mathrm{Prop}$ に対して，$\lambda(P) \subseteq M$.

$P \in \mathrm{Prop}$ と $A \subseteq M$ に対して，$\mathcal{M}$ で $\lambda(P)$ の値のみを A に変えて得られる Kripke 構造を $\mathcal{M}[P \to A]$ と書く. ■

定義 3 $\varphi \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ と Kripke 構造 $\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ に対して，集合 $\mathrm{Sat}(\varphi, \mathcal{M}) \subseteq M$ を定義する．混乱のおそれのないときには $\mathrm{Sat}(\varphi)$ と書く.

- $\mathrm{Sat}(\top) = M$，$\mathrm{Sat}(\bot) = \varnothing$.
- $P \in \mathrm{Prop}$ に対して，$\mathrm{Sat}(P) = \lambda(P)$, $\mathrm{Sat}(\neg P) = M \setminus \lambda(P)$.
- $\mathrm{Sat}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{Sat}(\varphi_1) \cup \mathrm{Sat}(\varphi_2)$, $\mathrm{Sat}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{Sat}(\varphi_1) \cap \mathrm{Sat}(\varphi_2)$.
- $\mathrm{Sat}(\langle a \rangle\varphi) = \{m \in M \mid (m, m') \in R(a)$ なる $m' \in M$ が存在して，$m' \in \mathrm{Sat}(\varphi)\}$, $\mathrm{Sat}([a]\varphi) = \{m \in M \mid (m, m') \in R(a)$ なる任意の $m' \in M$ に対して，$m' \in \mathrm{Sat}(\varphi)\}$.
- $\mu X\varphi \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ または $\nu X\varphi \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ とする．$A \subseteq M$ に対して $\mathrm{Sat}(\varphi, \mathcal{M}[X \to A])$ を対応させる関数は，単調関数となる ($\neg X$ が現れないことに注意) から，最小不動点 L と最大不動点 G を持つ．$\mathrm{Sat}(\mu X\varphi) = L$，$\mathrm{Sat}(\nu X\varphi) = G$.

$m \in \mathrm{Sat}(\varphi, \mathcal{M})$ のとき，$\mathcal{M}, m \models \varphi$ と書く．混乱のおそれのないときには $m \models \varphi$ と書く. ■

例として，$\mathrm{Prop} = \{P\}$，$M = \omega$ (最小の無限順序数，すなわち，自然数全体の集合)，$\mathrm{Mod} = \{a, \overline{a}\}$，$R(a) = \{(n, n+1) \mid n < \omega\}$，$\lambda(P) = \{0\}$ とし

て，Kripke 構造 $\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ を考える．$\varphi_1 = \nu X(\neg P \wedge [a]X)$，$\varphi_2 = \mu X(P \vee [\overline{a}][\overline{a}]X)$ とすると，$\mathrm{Sat}(\varphi_1) = \omega \setminus \{0\}$，$\mathrm{Sat}(\varphi_2) = \{2n \mid n < \omega\}$ である．なお，φ_2 は，2 方向 CTL 論理式では記述できない例になっている．

定義 4　$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ とする．任意の Kripke 構造 $\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ と任意の $m \in M$ に対して $\mathcal{M}, m \models \varphi_1 \iff \mathcal{M}, m \models \varphi_2$ が成り立つとき，φ_1 と φ_2 は同値であるといい，$\varphi_1 \equiv \varphi_2$ と書く． ∎

定義 5　以下の条件を満たす $\varphi \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ を，正規形の論理式という：　$\mu X\psi$ または $\nu X\psi$ が φ の部分論理式であるとき，

- ψ における X の出現は，すべて自由である．言い換えれば，$\mu X\chi$ または $\nu X\chi$ の形の ψ の部分論理式はない．
- ψ における X のすべての出現に対し，その出現を含む ψ の部分論理式 χ で，$\chi = \langle a\rangle\xi$ または $\chi = [a]\xi$ となるものがある．($a \in \mathrm{Mod}$) ∎

たとえば，$\varphi_1 = \mu X.[a](X \vee \mu X.\langle b\rangle X)$ は，最初の条件を満たさないので，正規形でない．また，$\varphi_2 = \mu X.X$ は，2 番目の条件を満たさないので正規形でない．一方，$\varphi_3 = \mu X.[a](X \vee \mu Y.\langle b\rangle Y)$ は正規形である．

次の結果が知られている [12, Lemma 2.2]:

命題 6　任意の $\varphi \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ に対し，$\varphi \equiv \psi$ となる正規形の論理式 $\psi \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ が存在する． ∎

そこで以下では，特にことわらないかぎり，正規形の論理式だけを考える．

定義 7

(1) $\varphi = \mu X\psi$ または $\varphi = \nu X\psi$ であるとき，ψ の中に現れる X をすべて φ で置き換えて得られる論理式 $\psi(\varphi/X)$ を $\exp(\varphi)$ で表す．

(2) $\mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ 上の関係 $\rightarrow_{\mathrm{e}}$ を，以下を含む最小の関係として定義する．
- $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow_{\mathrm{e}} \varphi_i$ $(i = 1, 2)$.
- $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow_{\mathrm{e}} \varphi_i$ $(i = 1, 2)$.
- $\langle a\rangle\varphi \rightarrow_{\mathrm{e}} \varphi$.
- $[a]\varphi \rightarrow_{\mathrm{e}} \varphi$.
- $\mu X\varphi \rightarrow_{\mathrm{e}} \exp(\mu X\varphi)$.
- $\nu X\varphi \rightarrow_{\mathrm{e}} \exp(\nu X\varphi)$.

(3) $\mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ の $\rightarrow_{\mathrm{e}}$ に関する強連結成分全体の集合を $\mathcal{D}$ とする．$\mathcal{D}_\mu = \{D \in \mathcal{D} \mid D$ に主論理記号が μ の論理式が含まれる $\}$，$\mathcal{D}_\nu = \{D \in \mathcal{D} \mid D$ に主論理記号が ν の論理式が含まれる $\}$，と定義する．

(4) $\varphi \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ に対し，次の条件を満たす $\mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ の部分集合 C のうち，包含関係に関して最小の集合を $\mathrm{cl}(\varphi)$ と定義する．
- $\varphi \in C$.
- $\psi \in C$ かつ $\psi \rightarrow_e \chi$ ならば，$\chi \in C$. ∎

例として，$\varphi = \mu X([a]X \wedge \nu Y\langle b\rangle Y)$ を考える．$\psi = \nu Y\langle b\rangle Y$ と書くことにすれば，$\varphi = \mu X([a]X \wedge \psi)$ であり，$\exp(\varphi) = [a]\varphi \wedge \psi$．$\varphi \rightarrow_e [a]\varphi \wedge \psi \rightarrow_e [a]\varphi \rightarrow_e \varphi$ となる．$D_1 = \{\varphi, [a]\varphi \wedge \psi, [a]\varphi\}$，$D_2 = \{\psi, \langle b\rangle\psi\}$ とすると，$D_1 \in \mathcal{D}_\mu$，$D_2 \in \mathcal{D}_\nu$ である．$\mathrm{cl}(\varphi) = \{\varphi, [a]\varphi \wedge \psi, [a]\varphi, \psi, \langle b\rangle\psi\}$ となる．

命題 8

(1) $\varphi \equiv \exp(\varphi)$.

(2) $D \in \mathcal{D}_\mu \cup \mathcal{D}_\nu$ とすると，D は有限集合である．

(3) $\mathrm{cl}(\varphi)$ は有限集合であり，その要素数は φ の長さ (論理記号と述語記号の数) に関して線形である．

(4) $\mathcal{D}_\mu \cap \mathcal{D}_\nu = \varnothing$.

証明

(1),(2),(3) については，[10] を参照．(4) は，無交代性からしたがう． ∎

2.2　Kripke 構造に関する性質

この節では，2 方向様相 μ 計算論理式と Kripke 構造に関するいくつかの基本的な性質を掲げる．これらは，充足可能性決定手続きの正当性の証明で使用される．$\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ を Kripke 構造とする．

定義 9

(1) $Q \subseteq \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}} \times M$ とする．$\{(\varphi, m) \in Q \mid \varphi$ の主論理記号は $\langle\rangle$ $(a \in \mathrm{Mod})$ または $\vee\}$ 上で定義された関数 F が以下を満たすとき，F を Q 上の選択関数という．
- $F(\varphi_1 \vee \varphi_2, m) \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$
- $F(\langle a\rangle\varphi, m) \in M$，$(m, F(\langle a\rangle\varphi, m)) \in R(a)$,

(2) $Q \subseteq \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}} \times M$，$F$ を Q 上の選択関数とする．$\mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}} \times M$ 上の関係 R_F を，次を満たす最小のものとして定義する．
- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ で，$F(\varphi, m)$ が定義されているとき，$(\varphi, m)\, R_F\, (F(\varphi, m), m)$.
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2, m)\, R_F\, (\varphi_i, m)$　$(i = 1, 2)$.
- $F(\langle a\rangle\varphi, m)$ が定義されているとき，$(\langle a\rangle\varphi, m)\, R_F\, (\varphi, F(\langle a\rangle\varphi, m))$.
- $(m, n) \in R(a)$ のとき，$([a]\varphi, m)\, R_F\, (\varphi, n)$.
- φ の主論理記号が μ または ν のとき，$(\varphi, m)\, R_F\, (\exp(\varphi), m)$. ∎

命題 10　$Q \subseteq \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}} \times M$ と，Q 上の選択関数 F が，

以下の 4 条件を満たすとき，$Q \subseteq \{(\varphi, m) \mid m \models \varphi\}$ が成り立つ．

(1) $P \in \mathrm{Prop}$ について，$(P, m) \in Q$ ならば $m \in \lambda(P)$.

(2) $P \in \mathrm{Prop}$ について，$(\neg P, m) \in Q$ ならば $m \notin \lambda(P)$.

(3) Q は R_F について閉じている．すなわち，$(\varphi, m) \in Q$，$(\varphi, m)\, R_F\, (\psi, n)$ ならば，$(\psi, n) \in Q$.

(4) $D \in \mathcal{D}_\mu$ とする．$Q_D = (D \times M) \cap Q$ とするとき，$R_F \restriction (Q_D \times Q_D)$ は，Q_D 上の有基底的関係となる． ∎

次に, $D \in \mathcal{D}_\mu$ について, $D \times M$ に階層構造を導入する．順序数全体のクラスを On と書く．各 $\alpha \in \mathrm{On}$ と $D \in \mathcal{D}_\mu$ に対して，$V_\alpha^{\mathcal{M}}(D) \subseteq D \times M$ を，次のように定義する．ただし，以下の箇条書きでは条件「$(\varphi, m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D)$ であるか，または，$\varphi \notin D$ かつ $m \models \varphi$」を，$\mathrm{Base}(\varphi, m)$ と略記する．

- $(\varphi_1 \vee \varphi_2, m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D) \iff \mathrm{Base}(\varphi_1, m)$ または $\mathrm{Base}(\varphi_2, m)$.
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2, m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D) \iff \mathrm{Base}(\varphi_1, m)$ かつ $\mathrm{Base}(\varphi_2, m)$.
- $(\langle a \rangle \varphi, m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D) \iff \beta < \alpha$ と $(m, m') \in R(a)$ が存在して，$(\varphi, m') \in V_\beta^{\mathcal{M}}(D)$.
- $([a]\varphi, m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D) \iff (m, m') \in R(a)$ ならば $\beta < \alpha$ が存在して $(\varphi, m') \in V_\beta^{\mathcal{M}}(D)$.
- $(\mu X \varphi, m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D) \iff (\exp(\mu X \varphi), m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D)$.

命題 11 $\{(\varphi, m) \in D \times M \mid m \models \varphi\} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{\mathcal{M}}(D)$ ∎

そこで，$m \in M$, $\varphi \in D \in \mathcal{D}_\mu$，$m \models \varphi$ のとき，$m \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D)$ となる最小の α を，$\mathrm{rank}(\varphi, m)$ と書く．

2.3 充足可能性判定手続き

論理式 $\varphi_{\mathrm{I}} \in \mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ が与えられたとき, $\mathrm{Sat}(\varphi_{\mathrm{I}}, \mathcal{M}) \neq \varnothing$ となる Kripke 構造 $\mathcal{M}$ が存在するかどうかを，タブロー法によって判定する手続きを与える．

φ_{I} に対するタブローとは，有限有向グラフであって，各節点に $\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ に属する論理式のうちのいくつかが割り当てられているようなものである．各節点で，割り当てられている論理式が「成り立つ」と考える．φ_{I} のモデルがもし存在するのならば，それをタブローにある意味で埋め込むことができる．実際には，部分論理式の他にも補助的な情報を加えて，充足可能性判定が正しくできるように工夫する．

以下では，$\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ に属する論理式しか考えない．そこで，$\{D \in \mathcal{D}_\mu \mid D \cap \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}}) \neq \varnothing\}$ を，同じ $\mathcal{D}_\mu$ の記号で表すことにする．$\mathcal{D}_\mu \neq \varnothing$ と仮定して，一般性を失わない．そうでなければ，φ_{I} の代わりに $\varphi_{\mathrm{I}} \vee \mu X \langle a \rangle X$ を考えればよいからである．($\mu X \langle a \rangle X \equiv \bot$ である．)

定義 12 φ_{I} 型とは，3 つ組 $t = (\Gamma, E, f)$ で，以下を満たすものである．

- $\Gamma \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$
- E は $\mathcal{D}_\mu$ 上の関数で，各 $D \in \mathcal{D}_\mu$ に対して $E(D)$ は D 上の非反射的，推移的 2 項関係.
- f は $\{\varphi \in \Gamma \mid \varphi$ の主論理記号は $\vee\}$ 上で定義された関数で，各 $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathrm{dom}(f)$ に対して $f(\varphi) = \varphi_1$ または $f(\varphi) = \varphi_2$ となる．
- $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \Gamma$ ならば，$f(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \Gamma$．さらに $f(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in D \in \mathcal{D}_\mu$ ならば，$(\varphi_1 \vee \varphi_2, f(\varphi_1 \vee \varphi_2)) \in E(D)$.
- $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ ならば，$\varphi_j \in \Gamma \quad (j = 1, 2)$．さらに，$\varphi_j \in D \in \mathcal{D}_\mu$ ならば，$(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_j) \in E(D) \quad (j = 1, 2)$.
- $\varphi = \mu X \psi \in \Gamma$ ならば，$\exp(\varphi) \in \Gamma$．さらに，$\varphi \in D \in \mathcal{D}_\mu$ ならば，$(\varphi, \exp(\varphi)) \in E(D)$.
- $\varphi = \nu X \psi \in \Gamma$ ならば，$\exp(\varphi) \in \Gamma$.

このとき，Γ を $\Gamma(t)$，E を $E(t)$，f を $f(t)$ と記す．

φ_{I} 型全体の集合を T_{I} と書く． ∎

φ_{I} 型がタブローの節点になる．直観的な意味づけは，以下のようになる．まず，Γ は，前述のように，節点において「成り立つ」論理式である．次に f は $\varphi_1 \vee \varphi_2$ の形の論理式が成り立つときに，φ_1, φ_2 のうち成り立つものの 1 つを選択するものである．次に $E(D)$ であるが，後に 2.5 節で見るように，タブローからモデルを構成する際には，D の要素の列で，隣接する項が関係 $\to_e$ を満たすものを構成していく．この列が有限の長さしか持たないことを示すことがポイントとなる．そのためには，ループが生じないことが必要である．つまり，$\varphi, \psi \in D \cap \Gamma$ の場合に，φ から $\to_e$ の関係で ψ に到達でき，かつ，ψ から $\to_e$ の関係で φ に到達できることは避けなければならない．そこで，$E(D)$ として非反射的推移的関係を保持しておき，$\varphi \to_e \psi$ となるのは $(\varphi, \psi) \in E(D)$ のときのみになるように構成を行う．

$a \in \mathrm{Mod}$ に対して，T_{I} 上の 2 項関係 $\to_a$ を定義する．

定義 13 $a \in \mathrm{Mod}$，$t = (\Gamma, E, f)$，また，$t' = (\Gamma', E', f') \in T_{\mathrm{I}}$ とする．これらが次の条件を満たす

とき $t \to_a t'$ と定める．

- すべての $[a]\varphi \in \Gamma$ に対して，$\varphi \in \Gamma'$.
- すべての $[\overline{a}]\varphi \in \Gamma'$ に対して，$\varphi \in \Gamma$.
- $D \in \mathcal{D}_\mu$，$\varphi = [a]\varphi'$，$\psi' = [\overline{a}]\psi$，$\varphi, \psi \in D \cap \Gamma$，$\varphi', \psi' \in D \cap \Gamma'$ とするとき，次は同値．
  - $\varphi = \psi$ または $(\varphi, \psi) \in E(D)$
  - $\varphi' = \psi'$ または $(\varphi', \psi') \in E'(D)$ ∎

$t = (\Gamma, E, f) \in T_{\mathrm{I}}$，$D \in \mathcal{D}_\mu$ とする．$\Gamma \cap D$ の部分集合で，$E(D)$ に関して「閉じている」ものの全体を $\mathcal{S}_t(D)$ とする．正確には，$\mathcal{S}_t(D) = \{S \subseteq \Gamma \cap D \mid$ 任意の $\varphi \in S$ と $\psi \in \Gamma \cap D$ に対し，$(\varphi, \psi) \in E(D)$ ならば $\psi \in S\}$.

$S \in \mathcal{S}_t(D)$ と $\xi = \langle a \rangle \xi' \in \Gamma$ に対して，以下のように記号を定める．

- $\mathrm{req}_\Diamond(\xi, S) = \begin{cases} \{\xi'\} & (\xi \in S \text{ のとき}) \\ \varnothing & (\xi \notin S \text{ のとき}) \end{cases}$
- $\mathrm{req}_\Box(\xi, S) = \{\eta' \mid [a]\eta' \in S\}$,
- $\mathrm{req}(\xi, S) = \mathrm{req}_\Diamond(\xi, S) \cup \mathrm{req}_\Box(\xi, S)$

$\mathrm{req}(\xi, S)$ の直観的な意味は次のようになる．前述したように，$\to_e$ による展開が有限回しかおこらないように構成を行いたい．$\xi = \langle a \rangle \xi' \in \Gamma$ とすると，ξ は t で「成立している」のであるから，t の次の節点 t' で，ξ' を成立させるものが存在する．$D \cap \Gamma$ のすべての論理式について展開が有限であることを一気には保証できない．そこで，S に属する論理式についてだけ保証しようとする．そのために t' において保証してほしい論理式の集合が $\mathrm{req}(\xi, S)$ である．

この考え方を機能させるために，(t, S) の組を階層に分ける．$\mathrm{req}(\xi, S) \subseteq S'$ となる (t', S') が，(t, S) よりも下の階層に入っていれば良い．そこで，次の定義を行う:

定義 14　$T \subseteq T_{\mathrm{I}}$，$D \in \mathcal{D}_\mu$ とする．$j < \omega$ に対して，$V_j(D, T) \subseteq \{(t, S) \mid t \in T, S \in \mathcal{S}_t(D)\}$ を定義する．混乱のおそれのないときには V_j と記す．

- $V_0 = \varnothing$.
- $t \in T$，$S \in \mathcal{S}_t(D)$ とする．$(t, S) \in V_{j+1}$ となるための条件は，任意の $\xi = \langle a \rangle \xi' \in \Gamma(t)$ に対し，$\mathrm{req}(\xi, S) \neq \varnothing$ ならば，$(t', S') \in V_j$ が存在して，$t \to_a t'$ かつ $\mathrm{req}(\xi, S) \subseteq S'$ となることである． ∎

j に関する帰納法で $V_j \subseteq V_{j+1}$ が示せる．すなわち，$(V_j \mid j < \omega)$ は包含関係に関する上昇列となる．V_j は有限集合 $T_{\mathrm{I}} \times \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ の部分集合であるから，$J = J(D, T)$ があって，$j \geq J$ ならば $V_j = V_J$ となる．

定義 15　$T \subseteq T_{\mathrm{I}}$，$t = (\Gamma, E, f) \in T$ とする．

(1) 任意の $\xi = \langle a \rangle \xi' \in \Gamma$ に対して，$t \to_a t'$ なる $t' \in T$ で，$\xi' \in \Gamma(t')$ となるものが存在するとき，t は T で $\Diamond$ 無矛盾であるという．

(2) 任意の $D \in \mathcal{D}_\mu$ に対して，$(t, \Gamma \cap D) \in V_{J(D,T)}(D, T)$ となるとき，t は T で μ 無矛盾であるという． ∎

定義 16　$k < \omega$ に対して，$T_k \subseteq T_{\mathrm{I}}$ を定義する．

- $T_0 = T_{\mathrm{I}}$.
- $T_{k+1} = \{t \in T_k \mid t$ は T_k で $\Diamond$ 無矛盾かつ μ 無矛盾 $\}$. ∎

$(T_k \mid k < \omega)$ は有限集合の包含関係に関する下降列であるから，K があって，$k \geq K$ ならば $T_k = T_K$ となる．

定理 17　次の 2 条件は同値である．

(1) φ_{I} は充足可能．すなわち，$\mathcal{M}, m \models \varphi_{\mathrm{I}}$ となる Kripke 構造 $\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ と $m \in M$ が存在する．

(2) $t \in T_K$ で，$\varphi_{\mathrm{I}} \in \Gamma(t)$ となるものが存在する．

証明　2.4 節および 2.5 節を参照． ∎

定理 17 は無交代 2 方向様相 μ 計算論理式の充足可能性判定手続きを与えている．実際，与えられた論理式 φ_{I} の長さに関して EXPTIME で判定できることが，次のようにしてわかる．

$\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ の要素数は，φ_{I} の長さ n に関して線形であるから，T_{I} の要素数は $2^n \cdot 2^{n^2} \cdot 2^n$，つまり $2^{\mathcal{O}(n^2)}$ である．$\mathcal{S}_t(D)$ の要素数の総数も $2^{\mathcal{O}(n^2)}$ であるから，$\{(t, S) \mid t \in T_{\mathrm{I}}, S \in \mathcal{S}_t(D)\}$ の要素数も $2^{\mathcal{O}(n^2)}$ である．$(V_j(D, T_k) \mid j < \omega)$ は，この集合の部分集合の上昇列であるから，これが定常状態に達するまでのループの回数は $2^n \cdot 2^{\mathcal{O}(n^2)} = 2^{\mathcal{O}(n^2)}$ となる．外側の，T_k が定常状態に達するまでのループの回数も同じである．一方，ループの最も内側で行う作業は，$(t, S), (t', S'), \xi$ の組み合わせについて，大きさ n の集合の包含関係の検査であるので，この時間計算量も同じ $2^{\mathcal{O}(n^2)}$ である．すべてかけあわせた時間計算量は，$2^{\mathcal{O}(n^2)}$ となる．

なお，無交代 2 方向様相 μ 計算に含まれるある体系 (CTL) の充足可能性判定問題が EXPTIME 完全であることが知られている [3] ので，EXPTIME より効率の良い判定手続きは存在しない．

2.4 判定手続きの完全性

この節では，充足可能性判定手続きの完全性，すなわち定理 17 の (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明の概略を述べる．

Kripke 構造 $\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ で，$m_{\mathrm{I}} \models \varphi_{\mathrm{I}}$ となる $m_{\mathrm{I}} \in M$ が存在するものをとる．$m \in M$ に対し，$g(m) = (\Gamma, E, f) \in T_{\mathrm{I}}$ を，次のように定義する．

- $\Gamma = \{\varphi \in \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}}) \mid m \models \varphi\}$
- $D \in \mathcal{D}_\mu$ に対して，$E(D) = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi, \psi \in D \cap \Gamma,\ \mathrm{rank}(\varphi, m) > \mathrm{rank}(\psi, m)\}$
- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \in \Gamma$ のとき，$f(\varphi)$ は，φ_1 と φ_2 のうちの「成り立つ方」を選び，両方成り立つときには，「rank の高くない方」を選ぶ．正確には，$\varphi_1 \in \Gamma$ かつ $\varphi_2 \notin \Gamma$ であるか，または，$\varphi_1 \in \Gamma$ かつ $\varphi_2 \in \Gamma$ かつ $\mathrm{rank}(\varphi_1, m) \leq \mathrm{rank}(\varphi_2, m)$ であるかのいずれかが成り立つ場合に，$f(\varphi) = \varphi_1$，そうでない場合に，$f(\varphi) = \varphi_2$ と定める．

$\varphi_{\mathrm{I}} \in \Gamma(g(m_{\mathrm{I}}))$ であるから，手続きの完全性を示すためには，次の命題を示せば十分である．

命題 18　$m \in M$, $\varphi \in \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$, $m \models \varphi$ とする．このとき，任意の $k < \omega$ に対し，$g(m) \in T_k$ である．

証明　(スケッチ)　k に関する帰納法．$k = 0$ は明らか．k について成立すると仮定して $k+1$ で成立することを示す．$g(m) = (\Gamma, E, f)$ とする．$\xi = \langle a \rangle \xi' \in \Gamma$ とすると，$m \models \xi$ であるから，$m' \in M$ で，$(m, m') \in R(a)$, $m' \models \xi'$ となるものがある．$g(m) \to_a g(m')$，$\xi' \in \Gamma(g(m'))$ となることが確かめられ，帰納法の仮定から $g(m') \in T_k$ であるから，$g(m)$ は T_k において $\Diamond$ 無矛盾である．

次に，$D \in \mathcal{D}_\mu$ をとり，$\alpha \in \mathrm{On}$ に対して $S_\alpha = \{\varphi \in \Gamma \cap D \mid (\varphi, m) \in V_\alpha^{\mathcal{M}}(D)\}$ とする．明らかに $S_\alpha \in \mathcal{S}_{g(m)}(D)$ である．また，$J = J(D, T_k)$ とする．$g(m)$ が T_k において μ 無矛盾であることを示すためには，すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対して $(g(m), S_\alpha) \in V_J(D, T_k)$ であることを示せばよい．$V_J(D, T_k) = V_{J+1}(D, T_k)$ であるから，このためには，$\xi = \langle a \rangle \xi' \in \Gamma(g(m))$, $\mathrm{req}(\xi, S_\alpha) \neq \varnothing$ と仮定して，$(t', S') \in V_J(D, T_k)$ で，$g(m) \to_a t'$ かつ $\mathrm{req}(\xi, S_\alpha) \subseteq S'$ となるものが存在することを示せばよい．これを α に関する帰納法で示す．

$\alpha = 0$ の場合には，$\mathrm{req}(\xi, S_\alpha) = \varnothing$ となり，自明に成り立つ．また，α が極限順序数の場合には，S_α が有限集合なので $S_\beta = S_\alpha$ なる $\beta < \alpha$ が取れることからしたがう．$\alpha = \beta + 1$ の場合．$m \models \langle a \rangle \xi'$ であるから，$m' \models \xi'$，$(m, m') \in R(a)$ となる $m' \in M$ がとれる．さらに $\xi \in D$ の場合には，$\mathrm{rank}(\xi, m) > \mathrm{rank}(\xi', m')$ も成り立つように m' をとることができる．すると，$g(m) \to_a g(m')$ であり，また $\mathrm{req}(\xi, S_\alpha) \subseteq S_\beta$ も成立する．帰納法の仮定より $(g(m'), S_\beta) \in V_J(D, T_k)$ である．したがって，$g(m)$ は T_k において μ 無矛盾である．

以上合わせて，$g(m) \in T_{k+1}$ である．■

2.5 判定手続きの健全性

この節では，充足可能性判定手続きの健全性，すなわち定理 17 (2) $\Longrightarrow$ (1) の証明の概略を述べる．

まず準備をする．定理 17 (2) の条件にいう $\varphi_{\mathrm{I}} \in \Gamma(t_{\mathrm{I}})$ となる $t_{\mathrm{I}} \in T_K$ をとる．また，集合 L を，$L = \{(t, S, D) \in T_K \times \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}}) \times \mathcal{D}_\mu \mid (t, S) \in V_{J(D, T_K)}(D, T_K)\}$ で定める．さらに，$\mathcal{D}_\mu$ 上の巡回置換 $\tau : \mathcal{D}_\mu \to \mathcal{D}_\mu$ を一つとる．また，$D_0 \in \mathcal{D}_\mu$ を一つとる．

以下のように，L の要素を各節点のラベルに持つ，有限分岐木 $\hat{T}$ を構成する．

まず，$(t_I, \Gamma(t_I) \cap D_0, D_0)$ をラベルとして持つ節点 n_{I} を用意し，これを木 $\hat{T}$ の根とする．この節点は「未処理」であるとする．

次に，未処理の節点 n をとる．n のラベルを (t, S, D) とする．$\xi = \langle a \rangle \xi'$ の形をした $\Gamma(t)$ の各要素について，節点 n の子どもである節点 $n' = \mathrm{Succ}(n, \xi)$ を作成する．

t は T_K で $\Diamond$ 無矛盾であるから，$t \to_a t'$ となる $t' \in T_K$ で，$\xi' \in \Gamma(t')$ となるものがとれる．$\mathrm{req}(\xi, S) \neq \varnothing$ の場合は，$(t, S) \in V_{J(D, T_K)}(D, T_K)$ であるから，さらに，$(t', S') \in V_j(D, T_K)$，$j < J(D, T_K)$，$\mathrm{req}(\xi, S) \subseteq S'$ も成立する t' が存在する．j が最小となるように t' を選ぶ．また，$D' = D$ とする．一方，$\mathrm{req}(\xi, S) = \varnothing$ の場合は，$D' = \tau(D)$，$S' = \Gamma(t') \cap D'$ とする．t' は T_K で μ 無矛盾だから，$(t', S') \in V_{J(D', T_K)}(D', T_K)$ である．いずれの場合も，n' のラベルは，(t', S', D') とする．n' を未処理とし，n を処理済とする．これを繰り返す．

以上で木 $\hat{T}$ の構成が完了した．

節点 n のラベルを $l(n)$ で表す．また，$l(n) = (t, S, D)$ のとき，t, S, D を各々 $t(n)$, $S(n)$, $D(n)$ で表す．さらに，$t(n) = (\Gamma, E, f)$ のとき，Γ, E, f を各々 $\Gamma(n)$, $E(n)$, $f(n)$ で表す．また，$(t, S) \in V_j(D, T_K)$ となる最小の j を，$j(n)$ で表す．

構成法から，次の命題が成り立つことは容易に確認できる．

命題 19

(1) $n' = \mathrm{Succ}(n, \xi)$ のとき，$D(n') = D(n)$ ならば，

$j(n) > j(n')$.
(2) $n' = \mathrm{Succ}(n, \xi)$ のとき，$D(n') \neq D(n)$ ならば，$\mathrm{req}(\xi, S(n)) = \varnothing$.
(3) 任意の $D \in \mathcal{D}_\mu$ と $\hat{T}$ の枝 B に対して，$n \in B$ が存在して，$D(n) = D$，$S(n) = \Gamma(n) \cap D$ となる.

∎

Kripke 構造 $\mathcal{M} = (M, R, \lambda)$ を，次のように定義する．M は，木 $\hat{T}$ の節点全体である．また，$n_2 = \mathrm{Succ}(n_1, \langle a\rangle\xi')$ のとき，$(n_1, n_2) \in R(a)$，$(n_2, n_1) \in R(\overline{a})$ とする．最後に，$P \in \mathrm{Prop}$ に対して，$n \in \lambda(P) \iff P \in \Gamma(n)$ とする．

この Kripke 構造において，$\mathcal{M}, n_{\mathrm{I}} \models \varphi_{\mathrm{I}}$ となることを示す．このためには，$Q = \{(\varphi, n) \mid \varphi \in \Gamma(n)\}$ として，$Q \subseteq \{(\varphi, n) \mid n \models \varphi\}$ が言えれば十分である．このためには，命題 10 の 4 条件が成立することを示せばよい．ただし，選択関数 F は，$F(\varphi_1 \vee \varphi_2, n) = f(n)(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $F(\langle a\rangle\varphi, n) = \mathrm{Succ}(n, \langle a\rangle\varphi)$ で定義する．

4 条件のうち，(1),(2),(3) は容易に確認できる．

(4) を帰謬法で示す．$D \in \mathcal{D}_\mu$ と Q の要素の列 $((\varphi_i, n_i) \mid i < \omega)$ で，$\varphi_i \in D$，$n_i \in M$，$(\varphi_i, n_i)\, R_F\, (\varphi_{i+1}, n_{i+1})$ $(i < \omega)$ を満たすものが存在したと仮定する．

$j < k$ かつ $n_j = n_k$ ならば，$(\varphi_j, \varphi_k) \in E(n_j)(D)$ である．これは，$k - j$ に関する帰納法で，$\to_a$ の定義から示すことができる．すると，$E(n_j)(D)$ は非反射的だから，$\varphi_j \neq \varphi_k$ である．これは，各節点 $n \in M$ に対して，$n_i = n$ となる i は有限個しかないことを意味している．したがって，木 $\hat{T}$ の枝 B が存在して，$B \subseteq \{n_i \mid i < \omega\}$ となる．B を根から順に数え上げて $(b_k \mid k < \omega)$ とする．$k < \omega$ に対し，$n_i = b_k$ となる最大の i を $i(k)$ と書く．

命題 19(3) から，$D(b_k) = D$，$S(b_k) = \Gamma(b_k) \cap D$ となる k がとれる．$\varphi_{i(k)} \in S(b_k) = S(n_{i(k)})$ である．$n_{i(k)+1} \in B$，$n_{i(k)+1} = \mathrm{Succ}(n_{i(k)}, \langle a\rangle\xi)$ となる．$(\varphi_{i(k)}, n_{i(k)})\, R_F\, (\varphi_{i(k)+1}, n_{i(k)+1})$ であるから，$\varphi_{i(k)} = \langle a\rangle\xi$，$\xi = \varphi_{i(k)+1}$ であるか，または，$\varphi_{i(k)} = [a]\varphi_{i(k)+1}$ であり，いずれの場合も $\varphi_{i(k)+1} \in \mathrm{req}(\xi, S(n_{i(k)})) \subseteq S(n_{i(k)+1})$ である．$(\varphi_{i(k)+1}, \varphi_{i(k+1)}) \in E(n_{i(k)+1})(D)$ または $\varphi_{i(k)+1} = \varphi_{i(k+1)}$ であるから，$\varphi_{i(k+1)} \in S(n_{i(k+1)})$．以下同様に繰り返すことができる．

しかし，命題 19(2) と (1) から，これは，$(j_{n(k')} \mid k \leq k' < \omega)$ が自然数の無限降下列となることを意味し，矛盾が生じた．

3 無交代不動点 LGF

3.1 文法と意味論

(一階の) 変数記号の集合を Var，二階の変数記号 (述語記号) の集合を PS とする．各 $P \in \mathrm{PS}$ には，その引数の個数 $\mathrm{arity}(P)$ が定まっているものとする．

定義 20 不動点 LGF (loosely guarded fragment with fixed point operators) の論理式の集合 $\mu\mathrm{LGF}$ を再帰的に定義する．同時に，φ に自由に現れる一階および二階の変数の集合 $\mathrm{free}_1(\varphi)$ と $\mathrm{free}_2(\varphi)$ を定義する．

- $\top, \bot \in \mu\mathrm{LGF}$．$\mathrm{free}_j(\top) = \mathrm{free}_j(\bot) = \varnothing$ $(j = 1, 2)$.
- $P \in \mathrm{PS}$ とし，$\vec{x}$ を $\mathrm{arity}(P)$ 個の変数の並びとするとき，$P\vec{x}, \neg P\vec{x} \in \mu\mathrm{LGF}$．$\mathrm{free}_1(P\vec{x}) = \mathrm{free}_1(\neg P\vec{x}) = \vec{x}$，$\mathrm{free}_2(P\vec{x}) = \mathrm{free}_2(\neg P\vec{x}) = \{P\}$.
- $\varphi_1, \varphi_2 \in \mu\mathrm{LGF}$ のとき，$\varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \mu\mathrm{LGF}$．$\mathrm{free}_j(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{free}_j(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{free}_j(\varphi_1) \cup \mathrm{free}_j(\varphi_2)$ $(j = 1, 2)$.
- $\vec{x}$ を変数の並び，$\varphi \in \mu\mathrm{LGF}$，$\alpha = \bigwedge_{i=1}^n P_i\vec{y}_i$ ($P_i \in \mathrm{PS}$，$\vec{y}_i$ は $\mathrm{arity}(P_i)$ 個の変数の並び) とする．次の条件
  - $\mathrm{free}_1(\varphi) \subseteq \mathrm{free}_1(\alpha)$.
  - $\vec{x} \subseteq \mathrm{free}_1(\alpha)$
  - 各 $y \in \vec{x}$ と $s \in \mathrm{free}_1(\alpha)$ に対し，i が存在して，y と s がともに $\vec{y}_i$ に現れる．

  を満たすとき，$\exists\vec{x}.\, \alpha \wedge \varphi, \forall\vec{x}.\, \alpha \to \varphi \in \mu\mathrm{LGF}$．これらをそれぞれ $\exists\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi$，$\forall\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi$ と記す．$\mathrm{free}_1(\exists\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi) = \mathrm{free}_1(\forall\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi) = \mathrm{free}_1(\alpha) \setminus \vec{x}$，$\mathrm{free}_2(\exists\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi) = \mathrm{free}_2(\forall\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi) = \mathrm{free}_2(\varphi)$．$\alpha$ を $\exists\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi$,$\forall\vec{x}{:}\alpha.\,\varphi$ のガードと呼ぶ．
- $\varphi \in \mu\mathrm{LGF}$，$X \in \mathrm{PS}$，$l = \mathrm{arity}(X)$，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ を変数の l 個の並び，$\mathrm{free}_1(\varphi) \subseteq \vec{x}$ とする．$\vec{x}$ には同一の変数は 1 回しか現れないものとする．φ の部分論理式として，$\neg X\vec{t}$ の形のもの ($\vec{t}$ は変数の並び) が現れず，また，X は φ の部分論理式のガードには現れないものとする．このとき，$(\mathrm{LFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y})$, $(\mathrm{GFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y}) \in \mu\mathrm{LGF}$.
  $\mathrm{free}_1((\mathrm{LFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y})) = \mathrm{free}_1((\mathrm{GFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y})) = \vec{y}$,
  $\mathrm{free}_2((\mathrm{LFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y})) = \mathrm{free}_2((\mathrm{GFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y})) = \mathrm{free}_2(\varphi) \setminus \{X\}$.

$\varphi \in \mu\mathrm{LGF}$ が次の条件を満たすとき，φ を無交代 (alternation-free) 不動点 LGF 論理式という．

- $(\mathrm{LFP}_{X,\vec{x}}\psi)(\vec{y})$ が φ の部分論理式であり，$(\mathrm{GFP}_{Y,\vec{z}}\chi)(\vec{w})$ が ψ の部分論理式であるとき，$X \notin \mathrm{free}_2(\chi)$.
- $(\mathrm{GFP}_{X,\vec{x}}\psi)(\vec{y})$ が φ の部分論理式であり，$(\mathrm{LFP}_{Y,\vec{z}}\chi)(\vec{w})$ が ψ の部分論理式であるとき，$X \notin \mathrm{free}_2(\chi)$.

無交代不動点 LGF 論理式全体の集合を $\mu\mathrm{LGF}^{\mathrm{af}}$ と書く．

$\varphi \in \mu\mathrm{LGF}^{\mathrm{af}}$ に対し，φ の部分論理式 ψ に対する $\mathrm{free}_1(\psi)$ の個数の最大値を，$\mathrm{width}(\varphi)$ と書く．■

最小不動点演算子のスコープに全称限量子が現れない，という制限をおいた体系を考える:

定義 21 $\varphi \in \mu\mathrm{LGF}^{\mathrm{af}}$ が，次の条件を満たすとき，φ を無交代無全称不動点 LGF 論理式と呼ぶ．無交代無全称不動点 LGF 論理式全体の集合を $\mu\mathrm{LGF}^{\mathrm{af}}_{\forall\mathrm{f}}$ と書く．

- $\psi = (\mathrm{LFP}_{X,\vec{x}}\psi')(\vec{y})$ が φ の部分論理式で，$\chi = \forall\vec{z}{:}\alpha.\,\chi'$ が ψ' の部分論理式であるとき，χ' には X は現れない．■

$\mathcal{M} = (M, \lambda)$ を，述語記号の集合 PS に関する構造とする．すなわち，M は集合であり，λ は PS を定義域とする関数で，$P \in \mathrm{PS}$ に対して $\mathrm{arity}(P) = l$ とするとき，$\lambda(P) \subseteq M^l$.

$\varphi \in \mu\mathrm{LGF}$ と $\vec{m} \subseteq M$ に対して，関係 $\mathcal{M} \models \varphi[\vec{m}]$ を定義する．不動点演算子以外の部分は，一階述語論理における定義と同じである．不動点演算子について: $X \in \mathrm{PS}$ の引数の個数を l とする．$A \subseteq M^l$ に対し，$\mathcal{M}$ の $\lambda(X)$ のみを A に変更して得られる構造を $\mathcal{M}[X \to A]$ で表す．$A \subseteq M^l$ に $\{\vec{m} \in M^l \mid \mathcal{M}[X \to A] \models \varphi[\vec{m}]\}$ を対応させる関数は包含関係に関する単調関数であり，最小不動点 L と最大不動点 G がある．$\mathcal{M} \models ((\mathrm{LFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y}))[\vec{m}] \iff \vec{m} \in L$，$\mathcal{M} \models ((\mathrm{GFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y}))[\vec{m}] \iff \vec{m} \in G$ と定める．

3.2 充足可能性判定手続き

文 $\varphi_{\mathrm{I}} \in \mu\mathrm{LGF}^{\mathrm{af}}_{\forall\mathrm{f}}$ が与えられたとき，$\mathcal{M} \models \varphi_{\mathrm{I}}$ となる構造 $\mathcal{M}$ が存在するかどうかを判定する手続きを与える．

以下では，(一階の) 変数と述語記号は，φ_{I} に現れるものしか考えない．そこで，φ_{I} に現れる変数全体の集合を Var と書くことにする．また，必要ならば束縛変数をつけかえることによって，Var の個数は $\mathrm{width}(\varphi_{\mathrm{I}})$ であるとして良い．

定義 7 と同様に，$\exp(\varphi)$, $\to_{\mathrm{e}}$, $\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$, $\mathcal{D}_\mu$, $\mathcal{D}_\nu$ を定義する．ただし，$\exp((\mathrm{FP}_{X,\vec{x}}\psi)(\vec{y}))$ では，ψ 中の $X\vec{z}$ を $(\mathrm{FP}_{X,\vec{x}}\psi)(\vec{z})$ で置き換えるものとする．ここで，FP は LFP または GFP を表す．たとえば，$\exp((\mathrm{LFP}_{X,x}(Px \vee \exists w : Rxw.\,Xw))(y)) = Py \vee \exists w : Ryw.(\mathrm{LFP}_{X,x}(Px \vee \exists w : Rxw.\,Xw))(w)$ となる．また，$\to_{\mathrm{e}}$ の定義では，$\varphi = \exists\vec{x}{:}\alpha.\psi$, $\varphi = \forall\vec{x}{:}\alpha.\psi$ については，$\vec{y} \subseteq \mathrm{Var}$ に対して $\varphi \to_{\mathrm{e}} \psi(\vec{y}/\vec{x})$ とする．

命題 8 と同様に，$\exp(\varphi) \equiv \varphi$，$D \in \mathcal{D}_\mu \cup \mathcal{D}_\nu$ と $\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ は有限集合となり，$\mathcal{D}_\mu \cap \mathcal{D}_\nu = \varnothing$ が成り立つ．しかし，$\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ の要素数は，φ_{I} の長さ n に対して $2^{\mathcal{O}(n \log n)}$ となる．これは，変数の置換をした論理式も $\mathrm{cl}(\varphi)$ に入るためである．

$\mathrm{L}^{\mathrm{af}}_\mu$ の時と同様に φ_{I} 型を定義するが，E は使用しない．すなわち，φ_{I} 型は，組 $t = (\Gamma, f)$ であって，定義 12 と同様の性質を満たすものである．ただし，$\forall$ に関して，次の条件が追加される:

- $\forall\vec{x} : \alpha.\,\varphi \in \Gamma$，$\vec{y} \subseteq \mathrm{Var}$，$\alpha(\vec{y}/\vec{x}) \in \Gamma \implies \varphi(\vec{y}/\vec{x}) \in \Gamma$.

φ_{I} 型全体の集合を T_{I} と書く．

定義 22 $C \subseteq \mathrm{Var}$，$t = (\Gamma, f)$, $t' = (\Gamma', f') \in T_{\mathrm{I}}$ とする．以下の 2 条件が成り立つときに，$t \to_C t'$ と定義する．

- 任意の $\mathrm{free}_1(\varphi) \subseteq C$ なる $\varphi \in \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ に対して，$\varphi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma'$.
- 任意の $\mathrm{free}_1(\varphi) \subseteq C$ なる $\varphi \in \mathrm{dom}(f)$ に対して，$f(\varphi) = f'(\varphi)$. ■

$D \in \mathcal{D}_\mu$ と $t = (\Gamma, f) \in T_{\mathrm{I}}$ に対する $\mathcal{S}_t(D) \subseteq \Gamma \cap D$ の定義は，次のようにする:

$S \in \mathcal{S}_t(D) \iff$

- $S \subseteq \Gamma \cap D$.
- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \in S$ かつ $f(\varphi) \in D$ ならば，$f(\varphi) \in S$.
- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \in S$ かつ $\varphi_j \in D$ ならば，$\varphi_j \in S$ $(j = 1, 2)$.
- $\varphi = (\mathrm{LFP}_{X,\vec{x}}\varphi)(\vec{y}) \in S$ ならば，$\exp(\varphi) \in S$.

定義 14 と同様に $V_j = V_j(D, T)$ および $J = J(D, T)$ を定める．ただし，「無全称」という制限をおいたことによって $\forall$ についての条件が不要となるため，V_{j+1} の定義は次のようにする．

- $t \in T$，$S \in \mathcal{S}_t(D)$ とする．$(t, S) \in V_{j+1}$ となるための条件は，任意の $\xi = \exists\vec{x}{:}\alpha.\,\xi' \in S$ に対し，$(t', S') \in V_j$ と $\vec{y} \subseteq \mathrm{Var}$ が存在して，$t \to_{\mathrm{free}_1(\xi)} t'$ かつ $\alpha(\vec{y}/\vec{x}) \in \Gamma(t')$ かつ $\xi'(\vec{y}/\vec{x}) \in S'$ となることである．

$\mathrm{L}^{\mathrm{af}}_\mu$ の $\Diamond$ 無矛盾と μ 無矛盾と同様に，$\exists$ 無矛盾と LFP 無矛盾を定義する．ただし，$\Diamond$ 無矛盾の定義に

おける $t \rightarrow_a t'$ は，$t \rightarrow_{\mathrm{free}_1(\xi)} t'$ に読み替える．定義 16 の $\Diamond$ と μ を $\exists$ と LFP に読み替えることによって，T_k と K を定義する．

定理 23　次の 2 条件は同値である．

(1) φ_{I} は充足可能．すなわち，$\mathcal{M} \models \varphi_{\mathrm{I}}$ なる構造 $\mathcal{M}$ が存在する．

(2) $t \in T_K$ で，$\varphi_{\mathrm{I}} \in \Gamma(t)$ となるものが存在する．

証明　方針のみを示し，詳細は省略する．

完全性 ((1) $\implies$ (2)):　ほとんど様相 μ 計算の場合と同様である．命題 11 と同様に，$\mathcal{M}$ に階層構造を導入することができるので，$\varphi \in \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ と $\vec{m} \in M^k$ に対して $\mathrm{rank}(\varphi, \vec{m})$ を定義する．これを用いて同様に $g(\vec{m}) \in T_{\mathrm{I}}$ を定義し，$g(\vec{m}) \in T_k$ であることを帰納法で示すことができる．

健全性 ((2) $\implies$ (1)):　まず，様相 μ 計算の場合と同様に，ラベル (t, S, D) を持つ有限分岐木 $\hat{T}$ を作成する．$\hat{T}$ の節点全体の集合を N とする．構造 $\mathcal{M} = (M, \lambda)$ を定義する．まず，$M = N \times \mathrm{Var}$ と定める．

λ を定めるために, 準備が必要である．$n_1, n_2 \in N$ として，木 $\hat{T}$ において n_1 と n_2 とを結ぶ最短パス π を考える．π において隣接する 2 つの節点 n' と n'' を考えると，$n' = \mathrm{Succ}(n'', \xi)$ という関係がある．すべての隣接 2 節点に関する $\mathrm{free}_1(\xi)$ の共通部分を，$C(n_1, n_2)$ で表す．

$m_1, \ldots, m_l \in M$，$n \in N$，$m_j = (n_j, v_j)$　$(j = 1, \ldots, l)$ とする．すべての $j = 1, \ldots, l$ に対して，$v_j \in C(n_j, n)$ が成り立つときに, n を $m_1, \ldots, m_l \in M$ の代表節点と呼ぶ．$P \in \mathrm{PS}$, $\mathrm{arity}(P) = l$ の時，n と n' がともに $m_1, \ldots, m_l \in M$ の代表節点であれば，$Pv_1 \ldots v_l \in \Gamma(n) \iff Pv_1 \ldots v_l \in \Gamma(n')$ となる．そこで，$(m_1, \ldots, m_l) \in \lambda(P)$ であるための条件を，$m_1, \ldots, m_l$ の代表節点 n が存在して $Pv_1 \ldots v_l \in \Gamma(n)$ となること，とすることで，λ を定義する．

命題 10 の $\mu\mathrm{LGF}^{\mathrm{af}}$ 版を使用することにより，証明すべきことが，以下を満たす $D \in \mathcal{D}_\mu$ と無限列 $((\varphi_i, n_i) \mid i < \omega)$ が存在しないことに帰着される．

- $\varphi_i \in \Gamma(n_i) \cap D$.
- 以下のいずれかが成り立つ:
  - $\varphi_i = \psi_1 \vee \psi_2$, $n_i = n_{i+1}$, $\varphi_{i+1} = f(n_i)(\varphi_i)$.
  - $\varphi_i = \psi_1 \wedge \psi_2$, $n_i = n_{i+1}$, $\varphi_{i+1} = \psi_j$　($j = 1$ または 2).
  - φ_i の主論理記号が LFP，$n_i = n_{i+1}$，$\varphi_{i+1} = \exp(\varphi_i)$.
  - $\varphi_i = \exists \vec{x}{:}\alpha.\xi'$，$n_{i+1} = \mathrm{Succ}(n_i, \varphi_i)$，$\varphi_{i+1} = \xi'(\vec{y}/\vec{x})$．ただし，$\vec{y}$ は，V_{j+1} の定義に用いたもの．

(様相 μ 計算の場合と異なり，「無全称」の制限があるため，$\forall$ は現れない．したがって木 $\hat{T}$ を逆方向にたどるようなパスは考慮する必要がない．これが E が不要となる理由である．) このような無限列がとれないことは，様相 μ 計算の場合と同様に示すことができる．■

定理 23 は無交代無全称不動点 LGF 論理式の充足可能性判定手続きを与えている．計算量は，$\mathrm{cl}(\varphi)$ の要素数が異なることを除けば，様相 μ 計算の場合と同様に求めることができ，2EXPTIME となることがわかる．

なお, 不動点演算子のない LGF の充足可能性判定問題が 2EXPTIME 完全であることが知られている [5] ので，2EXPTIME より効率の良い判定手続きは存在しない．

4　実装における BDD の使用

4.1　方針

2 節および 3 節に述べた手続きを素朴に実装すると，時間/空間量とも非常に大きくなる．前者については $\mathscr{P}(\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}}))$ の個数の 2 乗程度のノードを用意して，これらの遷移関係を保持しなければならない．後者についてはさらにノードの数は多い．ブール関数を用いることによって，これらの多数のノードを効率的に表現することができれば，計算量を削減することが期待できる．実際，種々の体系について，BDD によるブール関数の表現を用いた効率のよい充足可能性判定が実装されている．これらには，様相論理体系 K[13] や，$\mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ の部分体系である 2 方向 CTL[21]，また $\mu\mathrm{LGF}_{\forall\mathrm{f}}^{\mathrm{af}}$ の部分体系である GF[20] 等がある．

この節では，$\mathrm{L}_\mu^{\mathrm{af}}$ について 2 節の手続きが BDD を使用して実装できることを説明する．

まず，準備として $\mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$，$\mathcal{D}_\mu$ などの集合を確定する．

$t = (\Gamma, E, f) \in T_{\mathrm{I}}$ と $S \in \mathcal{S}_t(D)$ を表現する必要がある．まず，$\Gamma \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ を表現するために，各 $\varphi \in \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ に対して BDD 変数 γ_φ を用意する．$E \subseteq \bigcup\{D \times D \mid D \in \mathcal{D}_\mu\}$ とみなせるから, 各 $\varphi, \psi \in D \in \mathcal{D}_\mu$ に対して BDD 変数 $e_{\varphi\psi}$ を用意する．f を表現するために，各 $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ に対して，BDD 変数 f_φ を用意する．最後に，$S \subseteq \bigcup \mathcal{D}_\mu$ であ

るから，S を表現するために，各 $\varphi \in \bigcup \mathcal{D}_\mu$ に対して BDD 変数 s_φ を用意する．

t の表現は，$e(t) = \bigwedge\{\gamma_\varphi \mid \varphi \in \Gamma\} \wedge \bigwedge\{e_{\varphi\psi} \mid (\varphi, \psi) \in \bigcup_{D\in\mathcal{D}_\mu} E(D)\} \wedge \bigwedge\{f_{\varphi_1\vee\varphi_2} \mid f(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \varphi_1\}$ であり，S の表現は，$e(S) = \bigwedge\{s_\varphi \mid \varphi \in S\}$ である．集合 $V_j \subseteq T_{\mathrm{I}} \times \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}})$ は，$e(V_j) = \bigvee\{e(t) \wedge e(S) \mid (t, S) \in V_j\}$ で表現される．

2 節で述べた手続きは，以上の BDD 変数 (およびそのプライム付きバージョン) を用いて翻訳することが可能である．一例をあげれば，関係 $\{(t, t') \mid t \to_a t'\}$ と T_{I} の部分集合 T の BDD 表現をそれぞれ $\mathrm{trans}(a)$ と e_T とすれば，集合 $\{t \in T \mid t$ は T で $\Diamond$ 無矛盾 $\}$ は，以下の BDD で表現される: $e_T \wedge \bigwedge\{\gamma(\varphi) \to \mathrm{exists}(X', e'_T \wedge (\gamma(\psi))' \wedge \mathrm{trans}(a)) \mid \varphi = \langle a\rangle\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_{\mathrm{I}}), a \in \mathrm{Mod}\}$．ただし X' はすべてのプライム付き BDD 変数の集合，$\mathrm{exists}(Y, e)$ は e に対する Y 中の BDD 変数のすべての 0/1 割当にわたる $\vee$ 演算である．

以上は，原理を述べたものであり，実装においては，さらなる高速化を行う余地がある．たとえば E のエンコーディングを工夫することにより，計算量を削減することが可能である．

4.2 実装の現状

本論文で提案している充足可能性判定アルゴリズム自体の実装はまだ行っていない．ここでは，類似のアルゴリズムの BDD を用いた実装を 2 件報告する．

無交代 2 方向様相 μ 計算の論理式を対象として，Kripke 構造を，各ノードの分岐数が 2 以下の有限木に限った体系を考える．この体系でも，2 節に述べた判定法と同じ考え方で，充足可能性判定手続きが構築でき，実装を行った [18]．いくつかの論理式についての実行結果を表 1 に示す．測定環境は，Pentium M 1.8GHz, 1GB メモリ，Linux である．BDD は，Buddy の Ocaml インタフェースを使用している．

次に，無交代無全称不動点 LGF 論理式を対象とし，LFP 演算子を使った論理式を $\psi(x) = (\mathrm{LFP}_{X,w}(Pw \vee \exists y : Rwy.\, Xy))(x)$ に固定して，3 節に述べた充足可能性判定の実装を行った [15]．$n < \omega$ に対して φ_n を，$\varphi_0(x) = \top$，$\varphi_{n+1}(x) = \neg P(x) \wedge \forall y : Rxy.\, \varphi_n(y)$ で定義して，$\psi_n = \exists x : Dx.\, \psi(x) \wedge \varphi_n(x)$ とする．ψ_n は，「R で n 回以上たどると P に到達する」ことを意味し，充足可能である．いくつかの n について，ψ_n の充足可能性判定を行った．表 2 に，その実行結果を示す．測定環境は，Pentium 3 1.13GHz, 128MB メモリ，MS Windows 2000, JavaBDD 0.6 である．表 1 と比較して場合，論理式の長さに対して実行時間が長くかかっているのは，アルゴリズムの複雑さの違い (EXPTIME に対して 2EXPTIME) によるものと考えられるが，今後さらに詳細に検証する必要がある．

表 1　μ 計算実装例実行結果

論理記号数	610	1806	817	4141	4141
BDD ノード数	322	2164	774	4626	30523
実行時間 (ミリ秒)	20	1036	88	120	784

5 議論

5.1 様相 μ 計算における無交代性と本アルゴリズム

本論文で提案したアルゴリズムは，一般の (無交代とは限らない) 様相 μ 計算論理式に対するアルゴリズムと比較し，計算量クラスとしては同一の EXPTIME に属するものであるが，BDD を用いた効率的な実装が可能である．

以下では，最小 (大) 不動点演算子を主論理記号に持つ論理式を $\mu(\nu)$ 論理式と呼ぶ．μ 論理式または ν 論理式 φ を成立させるためには，どちらもその展開形 ($\exp(\varphi)$) を成立させなければならない．ν 論理式の場合には，この展開が無限回起こっても構わないが，μ 論理式の場合には，有限回の展開で，その正しさが確認できなければならない．したがって，φ_{I} のモデルを作ろうとする試みにおいては，ν 論理式が成立することの確認は比較的容易である．$\varphi \iff \exp(\varphi)$ を保証してやればよいからである．一方，μ 論理式が成立することの確認を行うためには，モデルの各ノードで $\varphi \iff \exp(\varphi)$ が成り立つことに加えて，パス上でこの展開が有限回で終了することの保証も行わなくてはならない．

一般の様相 μ 計算の場合には，有限回を保証すべき展開と無限回を許す展開が入れ子になる．した

表 2　LGF 実装例実行結果

n	5	10	15
BDD ノード数	27872	83499	205079
実行時間 (ミリ秒)	1382	4557	19428

がって，μ 論理式の正しさを保証するために，(木モデルを作成するのであれば) 無限の大きさの木を考えなければならない．このために，交代木オートマトンという複雑な対象を扱うことになる．

これに対して，無交代様相 μ 計算の場合には，交代が起こらないことを要請しているため，μ 論理式が正しいのであれば，それが正しいことを保証する高さ有限の木が存在することになる．このような有限木は，高さに関する帰納法により，順次構成していくことが可能である．実際に本アルゴリズムで示したように，φ_I 型の集合 (および付加的な情報を持つ集合) に関する単純な集合操作の組み合わせで記述することができる．このため，BDD を用いた効率的な実装が可能となった．

5.2 μLGF における問題点

$\mu\mathrm{LGF}^\mathrm{af}$ の体系の定義を一見すれば，様相 μ 計算との類似性が見て取れる．ガード α は様相 a に，$\langle a\rangle$ と $[a]$ はそれぞれ $\exists\vec{x}{:}\alpha.$ と $\forall\vec{x}{:}\alpha.$ に，そして μ と ν は LFP と GFP に対応が付く．この見地からは，$\mathrm{L}_\mu^\mathrm{af}$ の充足可能性判定手続きを流用することによって $\mu\mathrm{LGF}^\mathrm{af}$ の論理式の充足可能性を判定できるのではないかと予想される．

しかし，(少なくとも単純な言い換えでは) これは機能しない．$\mathrm{L}_\mu^\mathrm{af}$ のモデルにおいては，各ノードにおける様相 a に関する後者ノードは本質的には有限個しかない．(そうでない場合にも，そうなるようにモデルを作り直すことができる．) 前節で述べたように μ 論理式が成立することを保証する部分木 (これを μ 論理式の witness と呼ぶ) は高さ有限であるから，全体として有限木になることがわかる．そこで，$\mathrm{cl}(\varphi_\mathrm{I})$ にある各 μ 論理式に対する witness をうまく「貼り合わせ」ることで，φ_I のモデルを構成することができる．

しかし，$\mu\mathrm{LGF}^\mathrm{af}$ の場合には，次の例のように，ガード α に関する後者が無限個存在する場合がある: $(\forall xyw : Pxyw.\ \exists z : Pxwz.\ \top) \wedge (\exists xyz : Pxyz.\ (\mathrm{LFP}_{X,w}((\forall yz : Pwyz.\ Xy) \wedge (\forall xy : Pxyw.\ Xy)))(x))$．この場合，LFP 論理式の witness が無限木になってしまう．このために，複数個の LFP 論理式の witness の「貼り合わせ」が機能しないのである．

この現象は，$\mu\mathrm{LGF}^\mathrm{af}$ においては，全称限量子がある意味で最大不動点演算子のように働いていると解釈することで説明することができる．たとえば，上にあげた例の論理式では，P によって関係付けられた点が無限に並ぶことが，全称限量子を使って表現されている．このことを $\mathrm{L}_\mu^\mathrm{af}$ において表現しようとすると，$\nu X(\langle a\rangle X \wedge \mu Y([\overline{a}]Y))$ のように，最大不動点演算子を使用することになる．したがって，LFP 論理式の内側に全称限量子が現れると，ある意味で「交代しない」という性質が破れてしまい，本研究で提案した手法では充足可能性が判定できない，と考えられる．

6 おわりに

様相 μ 計算の部分体系である無交代様相 μ 計算，および不動点 LGF の部分体系である無交代無全称不動点 LGF に関し，BDD を用いた効率的な実装が可能となる充足可能性判定手続きを提案した．後者について，現在の手法で「無全称」の制限が必要な理由を考察した．

今後の課題として，以下があげられる．

- $\mathrm{L}_\mu^\mathrm{af}$ の充足可能性判定手続きを実装すること．
- $\mu\mathrm{LGF}^\mathrm{af}$ の充足可能性判定手続きが構成できるように，現在の手法に改良を加えること．

謝辞

査読者の方々には，丁寧に原稿を検討していただき，また，貴重なコメントをいただきました．記して感謝します．

参考文献

[1] T. Ball and S. K. Rajamani. Automatically validating temporal safety properties of interfaces. In *Proceedings of the 8th international SPIN workshop on Model checking of software*, pp. 103–122. Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[2] R. E. Bryant. Symbolic boolean manipulation with ordered binary-decision diagrams. *ACM Computing Surveys*, 24(3):293–318, 1992.

[3] E. A. Emerson. Temporal and modal logic. In *Handbook of theoretical computer science (vol. B): formal models and semantics*, pp. 995–1072. Elsevier Science Publishers B.V., 1990.

[4] E. A. Emerson and E. M. Clarke. Using branching-time temporal logic to synthesize synchronization skeletons. *Science of Computer Programming*, 2(3):241–266, 1982.

[5] E. Grädel. On the restraining power of guards. *Journal of Symbolic Logic*, 64:1719–1742, 1999.

[6] E. Grädel. Guarded fixed point logics and the

monadic theory of countable trees. *Theoretical Computer Science*, 288:129–152, 2002.

[7] E. Grädel, W. Thomas, and T. Wilke eds. *Automata, Logics, and Infinite Games: A Guide to Current Research*, Vol. 2500 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2002.

[8] M. Hagiya, K. Takahashi, M. Yamamoto, and T. Sato. Analysis of synchronous and asynchronous cellular automata using abstraction by temporal logic. In *FLOPS2004: The Seventh Functional and Logic Programming Symposium*, Vol. 2998 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 7–21, 2004.

[9] T. A. Henzinger, R. Jhala, R. Majumdar, and G. Sutre. Lazy abstraction. In *Proceedings of the 29th Annual Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 58–70. ACM Press, 2002.

[10] D. Kozen. Results on the propositional μ-calculus. *Theoretical Computer Science*, 27:333–354, 1983.

[11] Z. Manna and P. Wolper. Synthesis of communicating processes from temporal logic specifications. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 6(1):68–93, 1984.

[12] D. Niwinski and I. Walukiewicz. Games for the μ-calculus. *Theoretical Computer Science*, 163(1,2):99–116, 1996.

[13] G. Pan, U. Sattler, and M. Y. Vardi. BDD-based decision procedures for K. In *Proceedings of the 18th International Conference on Automated Deduction*, pp. 16–30. Springer-Verlag, 2002.

[14] S. Safra. On the complexity of omega-automata. In *Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FoCS '88*, pp. 319–327. IEEE Computer Society Press, 1988.

[15] T. Sato. Implementation of tableaux-based satisfiability checkers using BDD. Master's thesis, University of Tokyo, 2005.

[16] K. Takahashi and M. Hagiya. Abstraction of graph transformation using temporal formulas. In *Supplemental Volume of the 2003 International Conference on Dependable Systems and Networks (DNS-2003)*, pp. W–65 to W–66, 2003.

[17] A. Tozawa. On binary tree logic for XML and its satisifiability test. 第 6 回プログラミングおよびプログラミング言語ワークショップ (PPL2004), 2004.

[18] A. Tozawa and M. Hagiya. Efficient decision procedure for a logic for XML. *IBM Research Report*, (RT0592), 2005.

[19] M. Y. Vardi. Reasoning about the past with two-way automata. In *Automata, Languages and Programming, 25th International Colloquium, ICALP'98*, Vol. 1443 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 628–641, 1998.

[20] 佐藤, 田辺, 萩谷. BDD を用いたガード付きフラグメントの充足可能性判定. 日本ソフトウェア科学会第 21 回大会論文集, 2004.

[21] 田辺, 高橋, 山本, 佐藤, 萩谷. BDD を用いた 2 方向 CTL 論理式充足可能性決定手続きの実装. コンピュータソフトウェア, 投稿中.